

Суть оптимизации МППВ (метода В. А. Антонова) состоит в многократно повторяющейся и уточняющейся аппроксимации экстремальной области m -мерной функции $U(\xi_j) \equiv U(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_m)$ также m -мерной параболической функцией $P(\xi_j)$, имеющей единственный максимум, условно названный вершиной. В k -приближении итерационного процесса параболическая функция P_k представляется в виде

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^m C_{j1k} \xi_j + C_{j2k} \xi_j^2,$$

где ξ_j – оптимизируемые аргументы; C_k, C_{j1k}, C_{j2k} – коэффициенты. Аппроксимацию проводят по опорным точкам, принадлежащим обеим функциям $U(\xi_j)$ и $P(\xi_j)$, для которых при поиске максимума^{*} функции $U(\xi_j)$ выполняются неравенства коэффициентов $C_{j2k} < 0$. В процессе приближений опорные точки с наименьшим значением $U(\xi_j)$, с учетом необходимой коррекции $C_{j2k} < 0$, заменяются вновь образованными опорными точками с координатами $\xi_{j6k}, U_6(\xi_{j6k})$, рассчитанными по вершине параболической функции. В результате аппроксимации осуществляется последовательное приближение вершинной точки параболической функции к точке максимума функции $U(\xi_j)$.

Оптимизация МППВ реализуется в следующем порядке.

Если распределение $U(\xi_j)$ имеет два или несколько максимумов, то расчеты МППВ проводятся в последовательно чередующихся его ортогональных сечениях, содержащих целевые функции U_0 . Каждое сечение образуется путем задания в функции U фиксированных значений некоторым параметрам ξ так, что в оставшихся координатах $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_j \dots \xi_m$ оно содержит единственный глобальный максимум U_{0m} .

В выделенном сечении U_0 устанавливаются опорные точки с координатами ξ_{jv} и U_{0v} . Здесь индекс j пробегает значения от 1 до m – количества оптимизируемых в сечении параметров, а индекс v обозначает номер опорной точки и изменяется от 1 до $2m+1$. Стартовое положение первой опорной точки ($v=1$) задается в области локализации максимума U_0 . Стартовое положение остальных опорных точек с номерами $v>1$ задается по следующему правилу ортогонального вогнутого перекрестка, которое состоит из двух частей. Центром перекрестка считаем положение первой опорной точки. Аргументы опорных точек с номерами $1 < v < 2j$ и $2j+1 < v \leq 2m+1$ тоже принимают значения центра. Опорные точки с номерами $2j$ и $2j+1$ устанавливаются по оси j -аргумента со смещением относительно центра в двух противоположных направлениях на интервал $|\Delta \xi_j|$. Координаты точек с номерами $v=2j$ выражаются разностью $\xi_{jv} = \xi_{j1} - |\Delta \xi_j|$, а с номерами $v = 2j+1$, соответственно, суммой $\xi_{jv} = \xi_{j1} + |\Delta \xi_j|$. Координаты опорных точек, установленные по первой части изложенного правила, приведены в таблице. Интервал $|\Delta \xi_j|$ в стартовом состоянии опорных точек назначается намного меньшим, чем размер области локализации. Примеры установки опорных точек по данному правилу показаны на рисунке.

Таблица. Координаты опорных точек МППВ, установленные по первой части правила ортогонального вогнутого перекрестка.

$\begin{matrix} \xi_{jv} \\ v \end{matrix}$	ξ_{1v}	ξ_{2v}	ξ_{3v}	$\dots$	ξ_{mv}
1	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	$\dots$	ξ_{m1}
2	$\xi_{11} - \Delta\xi_1 $	ξ_{21}	ξ_{31}	$\dots$	ξ_{m1}
3	$\xi_{11} + \Delta\xi_1 $	ξ_{21}	ξ_{31}	$\dots$	ξ_{m1}
4	ξ_{11}	$\xi_{21} - \Delta\xi_2 $	ξ_{31}	$\dots$	ξ_{m1}
5	ξ_{11}	$\xi_{21} + \Delta\xi_2 $	ξ_{31}	$\dots$	ξ_{m1}
6	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31} - \Delta\xi_3 $	$\dots$	ξ_{m1}
7	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31} + \Delta\xi_3 $	$\dots$	ξ_{m1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2m$	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	$\dots$	$\xi_{m1} - \Delta\xi_m $
$2m+1$	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	$\dots$	$\xi_{m1} + \Delta\xi_m $

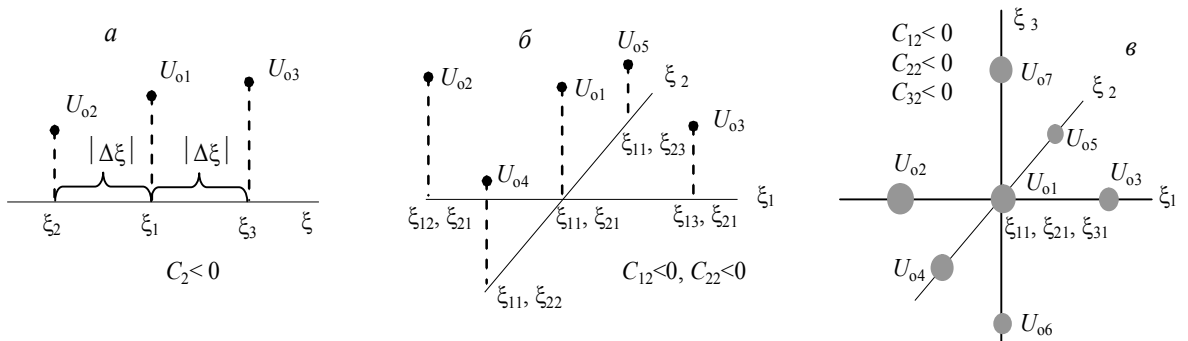


Рисунок. Установка опорных точек в МППВ по правилу перекрестка на стадиях старта, переноса и коррекции итераций. Количество одновременно оптимизируемых параметров: $a - 1$, $b - 2$, $v - 3$.

Название вогнутого ортогонального перекрестка опорных точек отражает то обстоятельство, что сечения параболической функции, проведенные вдоль каждого j -аргумента через центр перекрестка по трем опорным точкам с координатами $\xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$, ξ_{j1} , $\xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$, представляют собой вогнутые параболы. Они расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и в условиях неравенств $C_{j2} < 0$ имеют общий максимум P_B .

Возможно, что топология функции U_0 в области перекрестка имеет осложнения, например, локальный склон, перегиб. Поэтому одно или несколько упомянутых неравенств могут не выполняться. Тогда по

следующей второй части правила перекрестка проводится его расширение вдоль аргументов таких неравенств. Опорные точки с номерами $2j$ и $2j+1$ смещаются по j -аргументу относительно центра перекрестка в направлении, которое определяется по результатам сравнения значений U_0 в точках $\xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$ и $\xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$. Расширение проводится по направлению, проходящему от центра через точку, имеющую наибольшее значение U_0 . Точки с номерами $2j$ и $2j+1$ перемещаются с установленным интервалом поочередно шагами с опережением, т.е. «перепрыгиванием» одной точки через другую. Процедура расширения прекращается после восстановления соответствующих неравенств $C_{j2} < 0$ или при достижении координат перемещающихся опорных точек предельно допустимых значений.

После установки опорных точек по изложенному правилу проводятся итерации всего перекрестка или отдельных его точек в следующем порядке. Используя координаты опорных точек перекрестка, рассчитывают по формуле $\xi_{jb} = -C_{j1}/2C_{j2}$ совокупность вершинных аргументов ξ_{jb} параболической функции. Затем, принимая их значения и рассчитанное с их учетом значение функции $U_{ов}(\xi_{jb})$, получают новую опорную точку. После этого действуют по следующим вариантам.

1. Получено значение $U_{ов}$ меньше наименьшего $U_{ов}$ в опорных точках. Среди их номеров $v > 1$ найдется точка с наибольшим отсчетом $U_{ов}$ и большим, чем отсчет U_{01} в центре. Этой точке присваивается номер 1 и вокруг нее строится новый перекресток, т.е. он переносится на интервал $|\Delta\xi_j|$ в направлении роста U_0 . При отсутствии отмеченной точки интервалы $|\Delta\xi_j|$ перекрестка изменяют. Если после этого точка переноса не найдена, то итерации в данном сечении пропускаются, поскольку центральная точка является приближенным максимумом U_0 .

2. Получено значение $U_{ов}$ больше наибольшего $U_{ов}$ в опорных точках. Перекресток переносится на место новой опорной точки с координатами ξ_{jb} , $U_{ов}$. Этой точке присваивается номер один. Остальные опорные точки устанавливаются вокруг нее по уже упомянутому правилу перекрестка.

3. Получено значение $U_{ов}$ больше наименьшего и меньше наибольшего значения $U_{ов}$ в опорных точках. Тогда проводят итерации опорных точек. Заменяют одну из них с наименьшим значением $U_{ов}$ на новую опорную точку.

В каждом следующем k -приближении, используя координаты опорных точек, рассчитывают координаты вновь образованной точки $\xi_{jbk} = -C_{j1k}/2C_{j2k}$ и $U_{овk}(\xi_{jbk})$. В приближении $k+1$ действуют по следующим условиям.

Если значение $U_{ов}$ превышает $U_{ов}$ хотя бы одной опорной точки и выполнены все или часть соотношений $C_{j2k} < 0$, то заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением U_0 на новую опорную точку. Если $U_{ов}$ по значению равно или меньше наименьшего из $U_{ов}$ или нарушены все неравенства $C_{j2k} < 0$, то итерации временно останавливают и проводят коррекцию координат опорных точек.

Коррекция заключается в установке опорных точек по тому же правилу ортогонального вогнутого перекрестка (с возможным его расширением), но с учетом достигнутого на момент коррекции итерационного приближения. Теперь центром перекрестка считается единственная сохраняемая опорная точка, имеющая наибольшее значение U_{ov} . Ей присваивается номер $v=1$. Остальные опорные точки смещаются относительно центра на интервал $|\Delta \xi_{jk}|$, который в данном случае представляется усредненным текущим отклонением количества $2m+1=t$ опорных точек k -приближения от их взвешенного центра

$$|\Delta \xi_{jk}| = \frac{1}{t} \sum_{v=1}^{v=t} |\xi_{jvk} - \xi_{juk}|,$$

где ξ_{juk} – j -координата взвешенного центра опорных точек, определяемая выражением

$$\xi_{juk} = \frac{\xi_{j1k}U_{1k} + \xi_{j2k}U_{2k} + \dots + \xi_{jtk}U_{tk}}{U_{1k} + U_{2k} + \dots + U_{tk}}.$$

Коррекция опорных точек считается завершенной, когда восстанавливаются все неравенства $C_{j2k} < 0$. Далее, итерации возобновляются по указанному выше порядку перемещения всего ортогонального перекрестка или отдельных опорных точек в направлении дальнейшего роста функции U_0 .

Достаточность приближений внутри сечения оценивается сравнением сколь угодно малой допустимой, то есть заданной, простой средней относительной погрешности δ определения вершинных параметров ξ_j с ее частным значением δ_{jk} , рассчитанным в текущем приближении для каждого аргумента по формуле

$$\delta_{jk} = \frac{\sum_{v=1}^t |\xi_{j(k+1)} - \xi_{jkv}|}{t |\xi_{j(k+1)}|},$$

где ξ_{jkv} – значение j -аргумента опорной v -точки в k -приближении; $\xi_{j(k+1)}$ – значение j -аргумента новой опорной точки, рассчитанной для приближения $k+1$. Приближения с номером k считаются достаточными, если для каждого аргумента выполняется неравенство $\delta_{jk} \leq \delta$.

Достаточность чередования сечений определяется по сходимости рассчитанных в них параметров ξ_j . Сходимость оценивается по нескольким последним результатам расчетов, повторяющихся в очереди, когда в полученных малых приращениях $\Delta \xi_j$, соответствующих погрешности δ , появляются разные алгебраические знаки.

*) **Примечание.** При поиске минимума функции $U(\xi_j)$ знак неравенства коэффициентов $C_{j2k} < 0$ следует заменить на противоположный $C_{j2k} > 0$. Опорные точки на старте и в коррекциях итераций устанавливаются по правилу ортогонального выпуклого перекрестка. В итерациях опорные точки с наибольшим значением $U(\xi_j)$ заменяются вновь образованными опорными точками с координатами ξ_{jsk} , $U_s(\xi_{jsk})$.