

## **2. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ РАЗРАБОТКИ**

Геомеханическое обоснование конструктивных параметров систем подземной разработки является ключевым звеном технологии подземной отработки рудных месторождений. Выбор базовых параметров осуществляется, как правило, на стадии проектирования на полный срок существования горного предприятия. Последующая оптимизация или изменение этих параметров на стадии эксплуатации весьма затруднены, а в отдельных случаях и невозможны. Тем не менее, до сих пор наиболее широко распространенным методом проектирования является использование известных технологических решений на горных предприятиях, аналогичных проектируемому предприятию. В связи с этим остается актуальным совершенствование методов и создание научных основ расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости конструктивных элементов системы разработки, в первую очередь, предохранительных потолочин.

### **2.1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ПОДХОДОВ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА**

Большой вклад в развитие теории и практики управления горным давлением внесли М.И. Агошков, И.В. Баклашов, Д.М. Бронников, С.В. Ветров, Н.П. Влох, Н.Ф. Замесов, О.В. Зотеев, М.А. Иофис, Э.В. Каспарьян, А.А. Козырев, Г.Н. Кузнецов, С.В. Кузнецов, М.В. Курленя, Ю.М. Либерман, Г.А. Марков, А.Б. Макаров, М.М. Протодяконов, К.В. Руппенейт, В.В. Соколовский, И.А. Турчанинов, Г.Л. Фисенко, П.М. Цимбаревич, Л.Д. Шевяков, Е.И. Шемякин и др.

Исследования этих и других авторов показывают, что на геомеханические процессы при разработке месторождений оказывает влияние множество факторов: инженерно-геологическая обстановка (состав и строение массива, структурно-тектонические условия, поверхности и зоны ослабления, характер обвод-

ненности пород и т.д.); геометрические параметры массива и его составных частей; физико-механические свойства слагающих пород; природное поле напряжений; характер воздействия дополнительных поверхностных и объемных сил. Большое влияние оказывают также горнотехнические факторы, к которым относятся при подземной разработке глубина расположения выработок, принятая система разработки, размеры и форма выработанных пространств, способы управления кровлей, мероприятия по осушению пород и т.п.

Строгое и точное решение возникающих задач с полным учетом всех этих факторов практически недостижимо и поэтому, в зависимости от подхода, применяются те или иные методы исследований.

В целом, расчетные методы можно разделить на два принципиально различных типа:

- на основе общих гипотез и моделей механики сплошных сред;
- на основе специальных гипотез, представлений или концепций из инженерной практики и определенных разделов механики.

Первое направление, как теоретическое основание механики горных пород и скальных массивов, интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ К. Терцаги, Н.М. Герсеванова, Н.А. Цытовича (в первую очередь, относящихся к механике грунтов), П.М. Цимбаревича [114] и последующего обобщения в работах К.В. Руппенейта, Ю.М. Либермана [94, 96], Ж. Талобра [102], Л. Мюллера [80], Ч. Джекера [33] и др. Ценность этих первых работ, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы расчета НДС в массивах с упругой, упругопластической, а затем и более сложными моделями поведения. Совершенствование происходило, в частности, по пути интенсивного развития численного моделирования, в первую очередь, методом конечных элементов, а также методами граничных интегральных уравнений, дискретных элементов и т.д.

Применение методов второго типа особенно эффективно в случаях, когда структура рассматриваемого массива горных пород, его инженерно-геологиче-

ская модель имеет какие-либо особенности. Для описания процессов проявления горного давления М.М. Протодяконовым предложена гипотеза свода давления, которая также используется в расчетах несущей способности крепи и целиков на определенной стадии разработки месторождений твердых полезных ископаемых (А.А. Борисов, С.В. Ветров, Н.З. Галаев, Г.Е. Гулевич).

Для объяснения условий работы обнаженных пород кровли, представленной твердыми слоистыми породами, часто используется гипотеза балок, выдвинутая Ф. Шульцем. В различных интерпретациях она использована и усовершенствована в трудах В.Д. Слесарева [100], А.А. Борисова [6, 7], В.И. Борщ-Компанийца [8, 9], А.А. Иливицкого [43], Г.Л. Фисенко [109] и др.

Для условий Коробковского месторождения в работах Д.М. Казикаева [57, 58], Г.Г. Суржина [101], Б.А. Фомина [111] предохранительная потолочина впервые рассматривалась как изотропная плита, шарнирно опертая по контуру. Выполненные на этой основе исследования позволили решить многие задачи, связанные с совершенствованием технологии разработки. Вместе с тем в этих работах не было получено полное решение задачи, в результате чего не рассматривалось влияние отдельных действующих факторов, в частности, анизотропии железистых кварцитов, не выявлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния при развитии горных работ и др.

Большим преимуществом аналитических моделей является то, что они дают точный и достоверный результат решения поставленной задачи в замкнутой форме в виде функциональной зависимости исследуемых характеристик от параметров модели. Кроме того, аналитические методы обеспечивают глубину анализа получаемых решений. Применение же численных методов приводит к получению просто результата и нужно доказывать его достоверность, оценивать величину погрешности, для получения зависимостей проводить серии многовариантных расчетов. Поэтому представляется целесообразным вернуться к схематизации конструкции «потолочина – целики – камеры» в виде

плиты на упругом основании, тем более что, как следует из дальнейшего изложения, ее возможности далеко не исчерпаны.

## **2.2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ, РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

Техническая теория изгиба изотропных и анизотропных пластин разрабатывалась в трудах С.А. Амбарцумяна [2], Н.И. Безухова [4], И.Г. Бубнова [10], В.З. Власова [13, 14], Б.Г. Галеркина [15], И.В. Геккелера [16], И.И. Гольденבלата [87], М.И. Горбунова-Посадова [20, 21], Б.Н. Жемочкина [36], Л.Г. Доннелла [34], Б.Г. Коренева [70], Н.Н. Леонтьева [14], С.Г. Лехницкого [128], А. Лява [75], П.М. Огибалова [82], П.Ф. Папковича [83, 84], С.П. Тимошенко [104, 105], А.П. Филина [108], Ashton [116], Eshenauer [118], Leissa [129] и др. Техническая теория (теория Кирхгоффа) дает верное или почти верное значение для равнодействующей сил и моментов напряжений, взятых по толщине пластины  $h$ , во всех тех случаях, когда  $h^2$  по сравнению с квадратами линейных размеров весьма мало.

Для описания реакции основания, на котором лежит плита, в разное время были предложены различные модели. Первой и простейшей из них является модель упругого основания Винклера – Циммермана [16, 20], характеризуемая одним параметром  $k$ , таким, что реакция (упругий отпор)  $p$  основания равна  $p = kw$ . При этом Винклер называет  $k$  модулем основания, или коэффициентом постели, а Циммерман – коэффициентом оседания.

Слабой стороной модели упругого основания является то, что в ней не учитывается наличие осадок грунта (осадочной воронки) за пределами нагруженной площади основания, а также зависимость величины коэффициента постели от способа его экспериментального определения и, в частности, от размеров пробного штампа.

Одним из вариантов преодоления этих недостатков может быть модель Вигхардта, в которой давление в точке  $z$  от нагрузки, приложенной в точке  $\zeta$ ,

представляется функцией влияния  $K(|z - \zeta|)$  в виде убывающей экспоненты  $K = \exp(-k|z - \zeta|)$ , или модель Проктора, в которой соотношение  $p = kw$  заменяется интегральной зависимостью, вытекающей из известной формулы Буссинеска

$$w(x, y) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{E_0} \iint_S \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (2.1)$$

где  $E_0$  – модуль сжимаемости,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона,  $S$  – площадь нагружения.

Учет работы основания на сдвиг проведен в работах П.Л. Пастернака [85], М.М. Филоненко-Бородича, В.З. Власова, Н.Н. Леонтьева [13, 14], в которых, несмотря на внешнее различие подходов, авторы в результате пришли к общему выражению с двумя коэффициентами постели.

Вместе с тем, эти предложения по дальнейшему усовершенствованию моделей упругого основания ограничены в практическом применении из-за отсутствия как методики экспериментального определения новых параметров основания, так и решений конкретных практических задач на базе сделанных предположений. Поэтому принято целесообразным ограничиться простейшей моделью упругого основания Винклера – Циммермана.

Следует также отметить, что пластины на упругом основании, применяемые, главным образом, в расчетных схемах задач строительной механики, рассматриваются изотропными. В нашем случае, как указывалось в первой главе, породы потолчины обладают анизотропией деформационных свойств. При этом, как часто бывает в горной практике, имеющихся данных об анизотропии свойств пород и массива месторождения оказывается недостаточно, а их уточнение (или получение новых данных) требует большого количества специально проводимых дорогостоящих экспериментов. В связи с этим исследование степени влияния анизотропии является достаточно важным, прежде всего потому, что позволит определить те случаи, когда имеющуюся анизотропию можно не учитывать.

Суммируя вышесказанное, для расчета напряженно-деформированного состояния водозащитной предохранительной потолочины принята [24, 25, 27, 119, 120] модель анизотропной плиты размерами  $a \times b \times h$  под действием вертикальной поперечной нагрузки  $q = \gamma H$ , горизонтальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  на упругом основании Винклера из системы поддерживающих ее междукамерных и междупанельных целиков (рис. 2.1).

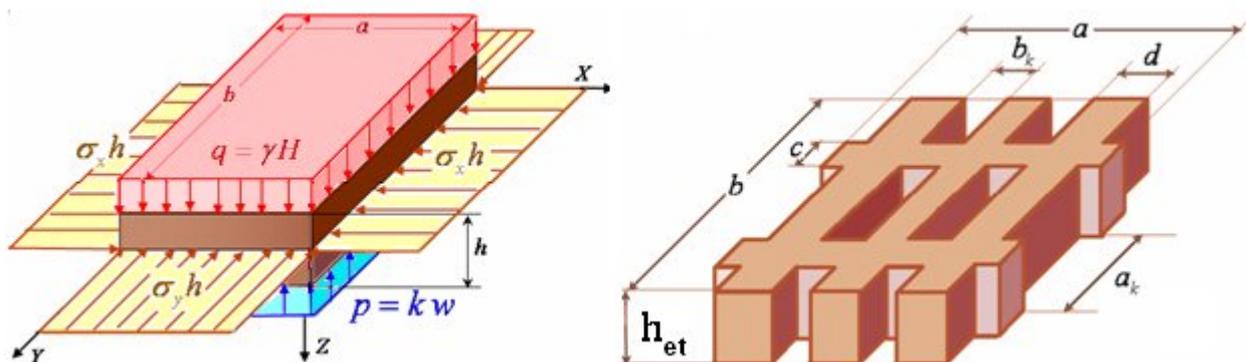


Рис. 2.1. Схема для расчета системы «потолочина – камеры – целики»: а) схема нагружения потолочины; б) упругое основание при системе с прямоугольными камерами;

Поскольку определяющим параметром в принятой постановке задачи является прогиб  $w$  потолочины, то разрешающее уравнение модели может быть записано в виде аналога уравнения в форме Софи Жермен – Лагранжа. При этом математическая постановка задачи в случае анизотропной потолочины сводится к решению с теми или иными граничными условиями уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \gamma H - h \left( \sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

а в случае ортотропной потолочины уравнения

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \gamma H - h \left( \sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

где  $D_i$  – цилиндрические жесткости при изгибе потолочины;  $k$  – коэффициент постели упругого основания;  $\gamma H$  – интенсивность действующей поперечной на-

грузки от веса налегающей толщи;  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – природные напряжения, действующие в срединной поверхности потолочины;  $h$  – мощность потолочины.

Граничные условия в случае защемления потолочины по контуру определяются равенством нулю прогиба  $w$  и угла поворота  $\vartheta$  и сводятся к

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (2.4)$$

В случае шарнирного опирания потолочины определяются условиями Кирхгофа (прогиб и изгибающий момент  $M_n$  равны нулю) и сводятся к граничным условиям Навье

$$w = 0; \quad \nabla^2 w = 0. \quad (2.5)$$

Входящие в математическую модель (разрешающее уравнение и его решение) параметры отражают:

- природные факторы (геологические условия, свойства массива пород, природное поле напряжений)
- технологические факторы (геометрические параметры системы разработки в виде размеров шахтного поля; камер целиков и потолочин, включая их взаимное расположение, через коэффициент постели упругого основания)

Железистые кварциты Коробковского месторождения имеют плоскость напластования и анизотропия их деформационных свойств имеет трансверсально-изотропный характер, главные оси 1 и 2 анизотропии совпадают с горизонтальными осями  $X$  и  $Y$  используемой системы координат (рис. 2.2) в силу практически вертикального падения напластования.

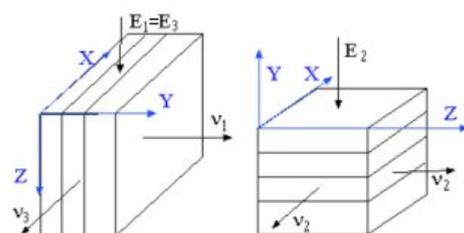


Рис. 2.2. Характеристики деформационной анизотропии железистых кварцитов

Деформационное поведение потолочины в этом случае описывается параметрами  $E_2, \nu_2, p = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ , поскольку для горных пород модуль сдвига

$G_{12}$  определяется из соотношения [73]

$$G_{12} = \frac{E_1 E_2}{E_1(1 + 2\nu_2) + E_2} = \frac{\rho E_2}{1 + \rho(1 + 2\nu_2)} \quad (2.6)$$

При не выдержанной в плане мощности потолочины, имеющей утолщения и сжатия, ее можно рассчитывать приближенно, как условную плиту прямоугольного сечения, имеющего ту же жесткость. При этом надо иметь в виду, что жесткости плиты с непрямоугольным очертанием сечения, вычисленные для двух направлений ее осей, будут различными. Чтобы расчет шел в запас, следует подобрать эквивалентное сечение прямоугольной пластины по наибольшему из двух значений ее фактической жесткости. В этом случае полученные из расчета величины усилий, действующих в сечениях с меньшей жесткостью, будут завышены против действительных.

### 2.3. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Использование той или иной математической модели (расчетной схемы) зависит от масштабов задачи (прежде всего, размеров потолочины в плане). При больших ее размерах (глобальном расчете в пределах шахтного поля) потолочина можно считать пластиной (тонкой плитой)

#### 2.3.1. Глобальный расчет потолочины в пределах шахтного поля

##### 2.3.1.1. Случай пространственного изгиба потолочины

В случае ортотропной прямоугольной потолочины с четырьмя опертыми краями (рис. 2.1) граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x = 0, \quad x = a, \quad w = M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{при } y = 0, \quad y = b, \quad w = M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

Все эти условия будут удовлетворены, если решение искать в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.9)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что таким решением будет

$$w = \frac{b^4}{\pi^4 D_2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \Upsilon \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2}} \quad (2.10)$$

Коэффициенты  $a_{mn}$  разложения поперечной нагрузки  $q$  в двойной ряд Фурье зависят от ее распределения и при равномерном распределении равны

$$a_{mn} = 4q \frac{1 - \cos m\pi}{m\pi} \cdot \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{16q}{\pi^2} \cdot \frac{1}{mn} & \text{для } m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{для остальных } m, n \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, для опертой анизотропной прямоугольной потолочины размерами  $a \times b \times h$  аналог классического решения Навье имеет вид

$$w = \frac{16qb^4}{\pi^6 D_2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \Upsilon \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]}, \quad (2.12)$$

где  $R = \frac{a}{b}$  – отношение размеров потолочины в плане,  $\Upsilon = \frac{\sigma_x^0}{\sigma_y^0}$  – отношение горизонтальных природных напряжений.

Вертикальная нагрузка  $\sigma_v$  на поддерживающие целики равна

$$\sigma_v = \frac{16qkb^4}{\pi^6 D_2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \Upsilon \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]} \quad (2.13)$$

При этом для ортотропной потолочины изгибающие  $M_x$ ,  $M_y$  скручивающие  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$  погонные моменты и поперечные перерезывающие погонные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  равны

$$M_x = -D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.14)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.15)$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.16)$$

где  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона, модуль сдвига для главных направлений 1 и 2 соответственно.

Обратный переход к напряжениям осуществляется по формулам

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z, \quad (2.17)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (2.18)$$

Дополнительные (вследствие прогиба потолочины) напряжения в ее горизонтальном  $\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\tau_{xy}$  и вертикальном  $\Delta\tau_{xz}, \Delta\tau_{yz}$  сечениях, которые с целью уменьшения количества аргументов, снижения размерности факторного пространства полученных решений и удобства последующего анализа представим в безразмерном виде:

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\gamma H} = \frac{96b^2}{\pi^4 h^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\frac{D_1}{D_2} \left( \frac{m^2}{R^2} + \nu_2 n^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \gamma \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]} \quad (2.19)$$

$$\frac{\Delta\sigma_y}{\gamma H} = \frac{96b^2}{\pi^4 h^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left( \nu_2 \frac{D_1}{D_2} \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \gamma \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]} \quad (2.20)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\gamma H} = \frac{192b^2 D_k}{\pi^4 h^2 R D_2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \gamma \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2}} \quad (2.21)$$

$$\frac{\Delta\tau_{xz}}{\gamma H} = \frac{24b}{\pi^3 R h} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left( \frac{D_1}{D_2} \frac{m^2}{R^2} + \frac{D_3}{D_2} n^2 \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \gamma \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]} \quad (2.22)$$

$$\frac{\Delta\tau_{yz}}{\gamma H} = \frac{24b}{\pi^3 h} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left( \frac{D_3}{D_2} \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \frac{D_1}{D_2} \frac{m^4}{R^4} + \frac{2D_3}{D_2} \frac{m^2 n^2}{R^2} + n^4 - \frac{\sigma_y h b^2}{\pi^2 D_2} \left( \gamma \frac{m^2}{R^2} + n^2 \right) + \frac{k b^4}{\pi^4 D_2} \right]} \quad (2.23)$$

Полученные решения в форме двойных тригонометрических рядов являются точными и поэтому важны для анализа этих решений. Вместе с тем, несмотря на простой вид полученных решений, они обладают существенным недостатком вычислительных чисто арифметических трудностей из-за плохой сходимости этих рядов. Точность конкретных арифметических вычислений зависит от числа членов, удерживаемых в частичных суммах. Выполненная оценка точности получаемых решений показала, что хотя ряды (2.12) – (2.13), (2.19) – (2.23) всегда сходятся, но сходятся очень медленно, особенно ряды для напряжений (2.19) – (2.23). Типичный процесс сходимости двойных рядов Фурье (при удерживании до  $N = \frac{(m+1)(n+1)}{4} = 2601$  члена ряда), который обязательно следует учитывать при расчетах во избежание возможных ошибочных результатов и выводов, показан на рис. 2.3.

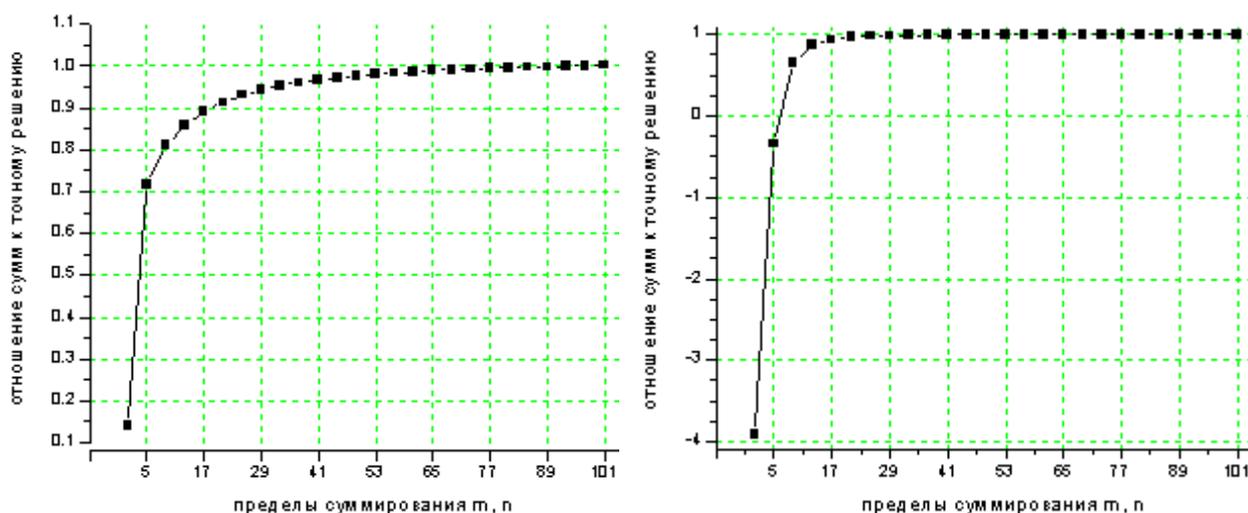


Рис. 2.3. Сходимость к решению горизонтальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$

Для устранения отмеченного недостатка целесообразно принятие специальных мер, в частности, изменения или модификации расчетной схемы, использования более быстро сходящихся рядов.

### 2.3.1.2. Случай цилиндрического изгиба потолочины

Частный, но практически важный случай изгиба имеет место в случае достаточно длинной прямоугольной потолочины, когда одна из сторон намного больше другой ( $a \gg b$ ,  $a \rightarrow \infty$ ). При нагрузке, не изменяющейся вдоль ее длинной стороны и изменяющейся по любому закону вдоль короткой стороны, поверхность изгиба будет близка к цилиндрической (тем точнее, чем дальше от короткой стороны) с образующими параллельными оси  $x$  (рис. 2.4). При этом

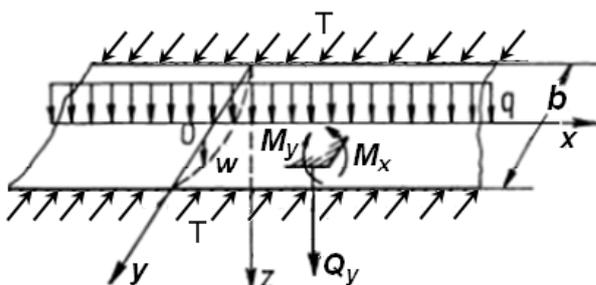


Рис. 2.4. Общая схема цилиндрического изгиба потолочины

учитывается упругая деформация по ее длине (оси), пренебрегается поперечными деформациями по высоте сечения и трением между потолочиной и основанием, что приводит к некоторому запасу прочности.

Прогиб в таком случае можно считать функцией только координаты  $y$ , и уравнение изгиба принимает вид

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( D_{22} \frac{d^2 w}{dy^2} \right) = q - kw + \frac{d}{dy} \left( T_y \frac{dw}{dy} \right) \quad (2.24)$$

Для потолочины постоянного сечения и постоянной по длине продольной силы  $q(y) = \gamma H$  дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + p_2 \frac{d^2 w}{dy^2} + p_4 w = f \quad (2.25)$$

где  $p_2 = -\frac{T_y}{D_{22}}$ ,  $p_4 = \frac{k}{D_{22}}$ ,  $f = \frac{\gamma H}{D_{22}}$ .

Моменты находятся из выражений

$$M_x = -D_{12} \frac{d^2 w}{dy^2}, \quad M_y = -D_{22} \frac{d^2 w}{dy^2}, \quad M_{xy} = -D_{26} \frac{d^2 w}{dy^2}. \quad (2.26)$$

а перерезывающие силы равны

$$Q_x = -D_{26} \frac{d^3 w}{dy^3}, \quad Q_y = -D_{22} \frac{d^3 w}{dy^3} \quad (2.27)$$

При этом для ортотропного случая, когда главные оси анизотропии параллельны сторонам,  $M_{xy} = 0$ ,  $Q_x = 0$ .

В случае достаточно жесткого основания или небольших осевых усилий, когда выполняется соотношение

$$\frac{1}{4} \frac{T_y^2}{D_{22}} < k \quad (2.28)$$

получаем, что  $\frac{1}{2} p_2^2 < p_4$  и характеристическое биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0 \quad (2.29)$$

имеет различные попарно сопряженные комплексные корни  $\pm \alpha \pm \delta i$ , где

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{p_4} - \frac{1}{4} p_2}, \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{p_4} + \frac{1}{4} p_2} \quad (2.30)$$

Нормальные фундаментальные функции уравнения (2.24) тогда равны

$$V_0(y) = \frac{1}{2\alpha\delta} \left[ 2\alpha\delta \operatorname{ch}\alpha y \cos \delta y - (\alpha^2 - \delta^2) \operatorname{sh}\alpha y \sin \delta y \right] \quad (2.31)$$

$$V_1(y) = \frac{1}{2\alpha\delta(\alpha^2 + \delta^2)} \left[ \alpha(3\delta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch}\alpha y \sin \delta y - \delta(\delta^2 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}\alpha y \cos \delta y \right] \quad (2.32)$$

$$V_2(y) = \frac{1}{2\alpha\delta} \operatorname{sh}\alpha y \sin \delta y \quad (2.33)$$

$$V_3(y) = \frac{1}{2\alpha\delta(\alpha^2 + \delta^2)} \left[ \alpha \operatorname{ch}\alpha y \sin \delta y - \delta \operatorname{sh}\alpha y \cos \delta y \right] \quad (2.34)$$

а для их производных имеют место равенства

$$\frac{d}{dy} V_0(y) = -p_4 V_3(y), \quad \frac{d}{dy} V_1(y) = V_0(y) \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dy}V_2(y) = V_1(y) - p_2V_3(y), \quad \frac{d}{dy}V_3(y) = V_1(y) \quad (2.36)$$

Решение уравнения (2.25) в нормальных фундаментальных функциях имеет вид

$$w(y) = w(0)V_0(y) + \frac{dw}{dy}(0)V_1(y) + \frac{d^2w}{dy^2}(0)V_2(y) + \frac{d^3w}{dy^3}(0)V_3(y) + \int_0^y f(s)V_3(y-s)ds \quad (2.37)$$

При этом при отсутствии продольных осевых сил

$$\alpha = \delta = \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \quad (2.38)$$

и равенства (2.31)–(2.34) выражают функции А.Н. Крылова.

Соотношения (2.25)–(2.38) удобны для применения при решении задачи Коши в общем случае силового нагружения. В частном случае краевой задачи (рис. 2.5) при постоянной поперечной нагрузке  $q_0 = \gamma H$  и отсутствии продоль-

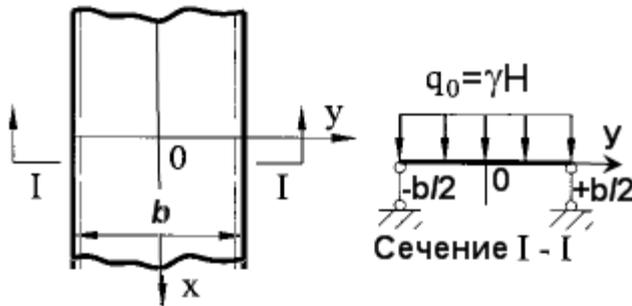


Рис. 2.5. Схема цилиндрического изгиба

ных сил общее решение дифференциального уравнения четвертого порядка может быть получено в более удобном виде, выраженном через четыре независимые фундаментальные функции А.Н. Крылова.

Общее решение может быть записано в виде:

$$w = w_{ч.р} + C_0Y_0(\alpha y) + C_1Y_1(\alpha y) + C_2Y_2(\alpha y) + C_3Y_3(\alpha y), \quad (2.39)$$

где  $Y_i$  – это функции  $V_i$  из соотношений (2.31)–(2.34), в которых  $\alpha = \delta$ .

Принимая начало координат в середине пролета потолочины, частное решение в виде  $w_{ч.р} = \frac{\gamma H}{k}$  и, сохраняя (в виду симметрии) только четные функции, будем иметь

$$w = \frac{\gamma H}{k} + C_0 Y_0(\alpha y) + 2\alpha^2 C_2 Y_2(\alpha y) \quad (2.40)$$

С учетом граничных условий

$$w \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{M_x}{D} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (2.41)$$

которые дают систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\frac{\gamma H}{k} + C_0 Y_0(\beta) + 2\alpha^2 C_2 Y_2(\beta) = 0, \quad (2.42)$$

$$-4\alpha^4 C_0 Y_2(\beta) + 2\alpha^2 C_2 Y_0(\beta) = 0, \quad \beta = \alpha \frac{b}{2} \quad (2.43)$$

искомое решение получаем в виде

$$w = \frac{\gamma H}{k} \left[ 1 - \frac{Y_0(\beta) Y_0(\alpha y) + 4\alpha^4 Y_2(\beta) Y_2(\alpha y)}{Y_0^2(\beta) + 4\alpha^4 Y_2^2(\beta)} \right], \quad (2.44)$$

из которого определяются угол поворота сечения

$$\vartheta = \frac{\gamma H}{k} \frac{4\alpha^4 Y_0(\beta) Y_3(\alpha y) - 4\alpha^4 Y_2(\beta) Y_1(\alpha y)}{Y_0^2(\beta) + 4\alpha^4 Y_2^2(\beta)}, \quad (2.45)$$

изгибающий момент

$$M_x = -\gamma H \frac{Y_0(\beta) Y_2(\alpha y) - Y_2(\beta) Y_0(\alpha y)}{Y_0^2(\beta) + 4\alpha^4 Y_2^2(\beta)}, \quad (2.46)$$

и поперечные силы

$$Q = -\gamma H \frac{Y_0(\beta) Y_1(\alpha y) + 4\alpha^4 Y_2(\beta) Y_3(\alpha y)}{Y_0^2(\beta) + 4\alpha^4 Y_2^2(\beta)}, \quad (2.47)$$

С учетом соотношений

$$\sigma = -\frac{6D}{h^2} \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (2.48)$$

и переходя к функциям А.Н. Крылова [71]

$$K_1(\xi) = \operatorname{ch} \xi \cos \xi, \quad K_2(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi), \quad (2.49)$$

$$K_3(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi, \quad K_4(\xi) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \quad (2.50)$$

получаем следующие значения для напряжений в потолочине, возникающих от действия постоянной поперечной нагрузки  $q_0 = \gamma H$ :

вертикальная нагрузка  $\sigma_v$  на поддерживающие целики

$$\frac{\sigma_v}{\gamma H} = 1 - \frac{K_1(\beta)K_1(\alpha y) + 4K_3(\beta)K_3(\alpha y)}{K_1^2(\beta) + 4K_3^2(\beta)}, \quad (2.51)$$

горизонтальные напряжения  $\sigma_h$  в потолочине

$$\frac{\Delta\sigma_h}{\gamma H} = -\frac{6}{(\alpha h)^2} \cdot \frac{K_1(\beta)K_3(\alpha y) - K_3(\beta)K_1(\alpha y)}{K_1^2(\beta) + 4K_3^2(\beta)}, \quad (2.52)$$

поперечные касательные напряжения  $\tau$  в потолочине

$$\frac{\tau_{zy}}{\gamma H} = -\frac{1}{\alpha h} \cdot \frac{K_1(\beta)K_2(\alpha y) + 4K_3(\beta)K_4(\alpha y)}{K_1^2(\beta) + 4K_3^2(\beta)}, \quad (2.53)$$

где  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}$ ;  $\beta = \frac{\alpha b}{2}$ .

В случае бесконечно протяженности в одном из направлений расчетные схемы прямоугольной и ленточной потолочкины эквивалентны. В остальных случаях использование расчетной схемы ленточной потолочкины, естественно, пойдет в запас.

### 2.3.1.3. Редукция общего решения к ординарным рядам Фурье

Следуя методу М. Леви [82, 84], позволяющему частично просуммировать двойной ряд, рассмотрим два случая изотропной прямоугольной потолочкины с двумя противоположно опертыми и двумя другими:

- (1) – защемленными или
- (2) – опертыми краями.

Расположив оси координат, как показано на рис. 2.6, для граничных условий будем тогда иметь:

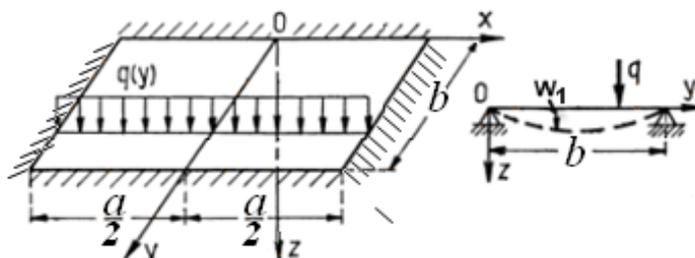


Рис. 2.6. Расчетная схема потолочкины

$$\text{при } y = 0, \quad y = b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.54)$$

$$\text{при } x = -\frac{a}{2}, \quad x = \frac{a}{2}, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ или } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.55)$$

Прогиб  $w(x,y)$  ищем в виде ряда

$$w = w_1 + w_2 = \frac{4q}{\pi D_2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \frac{k}{D_2} \right)} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} X_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.56)$$

где  $w_1$  – есть частное решение представляющее прогиб свободно опертой, покоящейся на упругом основании бесконечной ленточной плиты (полоски), удовлетворяющей уравнению

$$D_2 \frac{d^4 w}{dy^4} + kw = \gamma H \quad (2.57)$$

и граничным условиям (2.54), а  $w_2$  – решение однородного уравнения

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = 0 \quad (2.58)$$

Решение для  $w_1$  в виде ряда можно получить методом Рэлея – Ритца. Рассматривая полную энергию системы «потолочина + упругое основание»

$$\Pi = \frac{D_2}{2} \int_0^b \left( \frac{d^2 w_1}{dy^2} \right)^2 dy + \frac{k}{2} \int_0^b w_1^2 dy - \int_0^b \gamma H w_1 dy \quad (2.59)$$

и принимая в качестве полной последовательности измеримых функций ряд синусов

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.60)$$

получим для энергии

$$\Pi = \int_0^b \left[ \frac{D_2}{2} \left( \frac{d^2 w_1}{dy^2} \right)^2 + \frac{k}{2} w_1^2 - \gamma H w_1 \right] dy =$$

$$= \frac{\pi^4 D_2}{4b^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 C_n^2 + \frac{kb}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 - \frac{2\gamma H b}{\pi} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \quad (2.61)$$

Из условия минимизации по  $C_n$  получим соотношения

$$\begin{cases} \frac{\pi^4 D_2}{2b^3} n^4 C_n + \frac{kb}{2} C_n - \frac{2\gamma H b}{n\pi} = 0, & n = 2k + 1, \\ \frac{\pi^4 D_2}{2b^3} n^4 C_n + \frac{kb}{2} C_n = 0, & n = 2k, \end{cases} \quad (2.62)$$

И, таким образом,

$$w_1 = \frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{\left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)}, \quad (2.63)$$

Поскольку  $w_2$  решение (2.58), то функции  $X_n$  должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$D_1 X_n^{IV} - \frac{2D_3 n^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \left( \frac{D_2 n^4 \pi^4}{b^4} + k \right) X_n = 0 \quad (2.64)$$

или

$$X_n^{IV} - \frac{2D_3 n^2 \pi^2}{D_1 b^2} X_n'' + \frac{D_2}{D_1} \left( \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \frac{k}{D_2} \right) X_n = 0 \quad (2.65)$$

характеристическое уравнение которого в обозначениях  $\mu_n = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}$ ,

$2\beta_n^2 = \sqrt{\mu_n^4 + \lambda^4} + \mu_n^2$ ,  $2\gamma_n^2 = \sqrt{\mu_n^4 + \lambda^4} - \mu_n^2$  имеет четыре различных комплексных корня  $\pm\beta \pm \gamma i$  и, соответственно, четыре независимых частных решения вида  $\text{ch}\beta_n x \cos \gamma_n x$ ,  $\text{sh}\beta_n x \cos \gamma_n x$ ,  $\text{ch}\beta_n x \sin \gamma_n x$ ,  $\text{sh}\beta_n x \sin \gamma_n x$ .

Из условий симметрии функции  $X_n$  должны быть четными, т.е.

$$X_n = A_n \text{ch}\beta_n x \cos \gamma_n x + B_n \text{sh}\beta_n x \sin \gamma_n x \quad (2.66)$$

и прогиб потолочины тогда равен

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi y}{b} \left[ \frac{4\gamma H}{\pi^5 D_2} \cdot \frac{1}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} + A_n \operatorname{ch} \beta_n x \cos \gamma_n x + B_n \operatorname{sh} \beta_n x \sin \gamma_n x \right] \quad (2.67)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям (2.54), а для выполнения условий (2.55) константы  $A_n$  и  $B_n$  определяются из системы уравнений.

В первом случае (защемления по краям  $x = \pm a/2$ ) такая система уравнений после преобразований может быть записана в виде

$$A_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} + B_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} = -\frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \cdot \frac{1}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \quad (2.68)$$

$$A_n \left( \beta_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} - \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right) + B_n \left( \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} + \beta_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right) = 0 \quad (2.69)$$

После решения системы и очевидных преобразований решение может быть записано в виде

$$w = \frac{8\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\left( \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} + \beta_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right) \operatorname{ch} \beta_n x \cos \gamma_n x + \left( \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} - \beta_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} \right) \operatorname{sh} \beta_n x \sin \gamma_n x}{\gamma_n \operatorname{sh} \beta_n a + \beta_n \sin \gamma_n a} \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.70)$$

Во втором случае (опертой по краям  $x = \pm a/2$  потолочины) системой уравнений для определения  $A_n$  и  $B_n$  будет

$$A_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} + B_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} + \frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \cdot \frac{1}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} = 0 \quad (2.71)$$

$$A_n \left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} - 2\beta_n \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right] +$$

$$+B_n \left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} + 2\beta_n \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} \right] = 0, \quad (2.72)$$

после решения которой и подстановки в (2.56), получим

$$w = \frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} + 2\beta_n \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} \right] \operatorname{ch} \beta_n x \cos \gamma_n x - \right. \\ \left. - \frac{\left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} - 2\beta_n \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right] \operatorname{sh} \beta_n x \sin \gamma_n x}{\beta_n \gamma_n (\operatorname{ch} \beta_n a + \cos \gamma_n a)} \right\} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \quad (2.73)$$

Полученные ряды (2.70), (2.73), хотя и сходятся достаточно быстро, поскольку общие члены рядов  $w_n \sim n^{-5}$ , но их сходимость еще может быть усилена суммированием первого слагаемого.

Если из них выделить ряд

$$w_1 = \frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{\left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \quad (2.74)$$

то его сумма равна

$$w_1 = \frac{\gamma H}{k} \left( 1 - \frac{2 \sin \beta \operatorname{sh} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \sin(\eta - \beta) \operatorname{sh}(\eta - \beta) - \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \cos(\eta - \beta) \operatorname{ch}(\eta - \beta) \right) \quad (2.75)$$

Поэтому будем иметь:

в первом случае (защемления по краям  $x = \pm a/2$ )

$$w = w_1 -$$

$$\frac{8\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \left\{ \frac{\left( \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} + \beta_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right) \operatorname{ch} \beta_n x \cos \gamma_n x + \right. \\ \left. + \frac{\left( \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} - \beta_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} \right) \operatorname{sh} \beta_n x \sin \gamma_n x}{\gamma_n \operatorname{sh} \beta_n a + \beta_n \sin \gamma_n a} \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.76)$$

во втором случае (опертой по краям  $x = \pm a/2$  потолочины)

$$w = w_1 -$$

$$-\frac{4\gamma H b^4}{\pi^5 D_2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{\left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} + 2\beta_n \gamma_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} \right] \operatorname{ch} \beta_n x \cos \gamma_n x - \left[ (\beta_n^2 - \gamma_n^2) \operatorname{ch} \frac{\beta_n a}{2} \cos \frac{\gamma_n a}{2} - 2\beta_n \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n a}{2} \sin \frac{\gamma_n a}{2} \right] \operatorname{sh} \beta_n x \sin \gamma_n x}{\beta_n \gamma_n (\operatorname{ch} \beta_n a + \cos \gamma_n a)} \right\} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( n^4 + \frac{kb^4}{\pi^4 D_2} \right)} \quad (2.77)$$

Первое слагаемое правой части (2.76) или (2.77) учитывает, очевидно, тот прогиб потолочины, которую последняя имела бы, если бы ее кромки, параллельные оси ОУ, были бы удалены в бесконечность, и потолочина изгибалась бы по цилиндрической поверхности. Второе слагаемое учитывает влияние кромок  $x = \text{const}$ , при этом его можно трактовать как погрешность первого слагаемого, т.е. решения (2.44) для цилиндрического изгиба.

Напряжения находятся, используя соотношения (2.14)–(2.18). Полные записи получаемых в общем виде аналитических выражений не приводятся ввиду их громоздкости.

Таким образом, из полученных решений следует, что НДС конструкции «потолочина – целики – камеры» зависит от жесткости потолочины, ее размеров, модуля деформации и коэффициента постели упругого основания, зависящего от высоты этажа и размеров целиков и камер. Это дает возможность регулировать НДС конструктивных элементов в нужных пределах путем соответствующего подбора технологических параметров, в первую очередь, геометрических параметров ведения очистных работ (мощности потолочины, выемочной мощности, размеров камер и оставляемых междукамерных целиков).

### 2.3.2. Локальный расчет потолочины, поддерживаемой опорными целиками

При совершенствовании системы разработки возникает необходимость установить допустимый пролет отдельно взятой камеры, величина которого определяет, в конечном счете, размеры потерь руды в оставляемых целиках. В случае, когда толщина потолочины сопоставима с пролетом кровли, рассмотренные выше расчетные схемы тонких пластин становятся неадекватными и необходима их замена. Основы точной теории толстой пластинки были впервые даны Майкеллем и далее развиты Лявом [16, 75]. В противоположность решению Кирхгоффа здесь не делается никаких специальных допущений относительно характера деформированного состояния, и в основу теории кладутся основные уравнения теории упругости.

Подобные задачи для нужд строительной механики рассмотрены Б.Н. Жемочкиным [36] (расчет неразрезных балок-стенок), а для горной практики К.В. Руппенейтом и Ю.М. Либерманом [96] (расчет потолочины изотропного рудного массива в предположениях гидростатического распределения природных напряжений). В обеих постановках задач рассматривается, по существу, плоская задача теории упругости для прямоугольной полосы, решение которой ищется в форме Рибьера или Файлона – Белзецкого.

В нашей постановке задачи, с учетом деформационной анизотропии рудного массива, расчетная схема Б.Н. Жемочкина для оценки напряженно-деформированного состояния потолочины была модифицирована следующим образом (рис. 2.7).

Потолочина, с равномерно

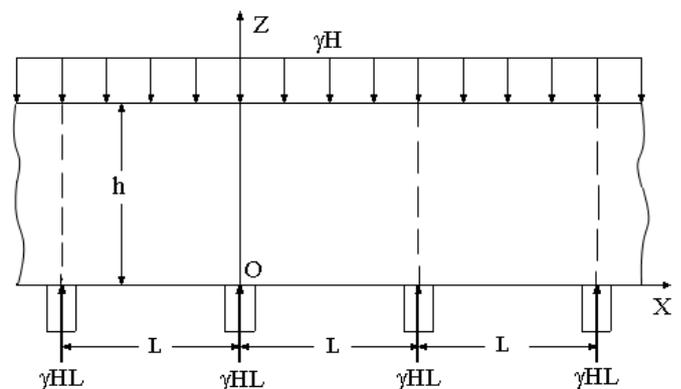


Рис. 2.7. Расчетная схема потолочины на опорных целиках

распределенной по ее верху нагрузкой интенсивностью  $\gamma H$ , опирается на опорные целики, расстояние между осями которых равно  $L$ . Реакции целиков в виде сосредоточенных сил приложены по их осям и равны  $\gamma HL$ . При этом, поскольку в дальнейших расчетах и рекомендациях (гл. 4) принято расположение длинной стороны целиков вкrest напластования пород, плоскость  $XZ$  будет плоскостью изотропии.

Краевые условия задачи при этом сводятся к:

– равенству нормальных напряжений по верхней кромке действующей нагрузке  $\sigma_z(x, h) = -\gamma H$ ,  $\tau_{xz}(x, h) = 0$ ;

– отсутствию вследствие симметрии касательных напряжений по осям целиков и в середине пролета камеры  $\tau(0, z) = \tau\left(\frac{L}{2}, z\right) = 0$ ;

– равенству суммы напряжений  $\sigma_y$  в пределах полупролета действующей нагрузке в тех же пределах  $\int_0^{L/2} \sigma_z dx = -\frac{\gamma HL}{2}$ ;

– отсутствию напряжений по свободной нижней кромке  $\sigma_z(x, 0) = \tau_{xz}(x, 0) = 0$ , при этом в точках приложения сосредоточенных сил реакции  $\sigma_z(0, 0) = \sigma_z(L, 0) \rightarrow \infty$ .

Решение ищется с помощью функции напряжений Эри (Airy). Так как напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  симметричны по отношению к оси  $Oz$ , функция напряжений принимается в виде тригонометрического ряда по косинусам с добавлением полинома 2-й степени для удовлетворения граничным условиям:

$$\phi(x, z) = A_1 x^2 + A_2 xz + A_3 z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha x) (C_{n1} \operatorname{sh} \alpha z + C_{n2} \operatorname{ch} \alpha z + C_{n3} y \operatorname{sh} \alpha z + C_{n4} y \operatorname{ch} \alpha z) \quad (2.78)$$

где  $\alpha = \frac{2n\pi}{L}$ .

Напряжения при этом будут равны

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 2A_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x \left[ \alpha (C_{n1} \operatorname{sh} \alpha z + C_{n2} \operatorname{ch} \alpha z + C_{n3} z \operatorname{sh} \alpha z + C_{n4} z \operatorname{ch} \alpha z) + 2(C_{n3} \operatorname{ch} \alpha z + C_{n4} \operatorname{sh} \alpha z) \right], \quad (2.79)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = -A_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x \left[ \alpha (C_{n1} \operatorname{ch} \alpha z + C_{n2} \operatorname{sh} \alpha z + C_{n3} z \operatorname{ch} \alpha z + C_{n4} z \operatorname{sh} \alpha z) + C_{n3} \operatorname{sh} \alpha z + C_{n4} \operatorname{ch} \alpha z \right], \quad (2.80)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (C_{n1} \operatorname{sh} \alpha z + C_{n2} \operatorname{ch} \alpha z + C_{n3} z \operatorname{sh} \alpha z + C_{n4} z \operatorname{ch} \alpha z). \quad (2.81)$$

Из краевых условий симметрии, равновесия по осям  $Ox$  и  $Oz$  получаем

$$A_1 = -\frac{\gamma H}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0. \quad (2.82)$$

Из условий на нижней границе

$$\alpha C_{n1} + C_{n4} = 0, \quad (2.83)$$

$$\gamma H + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 C_{n2} \cos \alpha x = 0, \quad (2.84)$$

что после разложения  $\gamma H$  в ряд по  $\cos \alpha x$  в интервале  $0 < \alpha x < 2\pi$  дает

$$C_{n2} = \frac{2\gamma H}{\alpha^2}, \quad (2.85)$$

при этом в точках  $x = 0$  и  $x = L$  разложение не имеет места (там бесконечно большие напряжения).

Условия на верхней границе дают еще два уравнения

$$\alpha (C_{n1} \operatorname{ch} \alpha h + C_{n2} \operatorname{sh} \alpha h + C_{n3} h \operatorname{ch} \alpha h + C_{n4} h \operatorname{sh} \alpha h) + C_{n3} \operatorname{sh} \alpha h + C_{n4} \operatorname{ch} \alpha h = 0 \quad (2.86)$$

$$C_{n1} \operatorname{sh} \alpha h + C_{n2} \operatorname{ch} \alpha h + C_{n3} h \operatorname{sh} \alpha h + C_{n4} h \operatorname{ch} \alpha h = 0. \quad (2.87)$$

Решение полученной системы 4 уравнений (2.83), (2.84), (2.86) и (2.87) с 4-мя неизвестными дает следующие значения

$$C_{n1} = -\frac{2\gamma H}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha h + \operatorname{sh}\alpha h \cdot \operatorname{ch}\alpha h}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2}, \quad C_{n2} = \frac{2\gamma H}{\alpha^2}, \quad (2.88)$$

$$C_{n3} = -\frac{2\gamma H}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2\alpha h}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2}, \quad C_{n4} = \frac{2\gamma H}{\alpha} \cdot \frac{\alpha h + \operatorname{sh}\alpha h \cdot \operatorname{ch}\alpha h}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2}. \quad (2.89)$$

Таким образом, искомые напряжения равны

$$\sigma_x = \gamma H \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \left\{ \frac{[\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h - 2\operatorname{sh}^2\alpha h \cdot \alpha z] \operatorname{sh}\alpha z +}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} + \frac{[-2(\operatorname{sh}^2\alpha h + \alpha^2 h^2) + (\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h)\alpha z] \operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right\}, \quad (2.90)$$

$$\tau_{xz} = \gamma H \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x \left\{ \frac{[2\alpha^2 h^2 + (\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h)\alpha z + 2\operatorname{sh}^2\alpha h \cdot \alpha z \operatorname{ch}\alpha z] \operatorname{sh}\alpha z}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right\} \quad (2.91)$$

$$\sigma_z = -\gamma H \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x \left\{ \frac{[\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h + 2\operatorname{sh}^2\alpha h \cdot \alpha z] \operatorname{sh}\alpha z +}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} + \frac{[-2(\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2) - (\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h)\alpha z] \operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right\} \right). \quad (2.92)$$

Ряды сходятся достаточно быстро при удалении от нижнего края  $z = 0$ .

При малых значениях пролетов камер  $L < h$ , переходя к пределам при  $\alpha h = \frac{2\pi n h}{L} \rightarrow \infty$ , с учетом соотношений

$$\lim_{\alpha h \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}2\alpha h + 2\alpha h}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} = 2, \quad \lim_{\alpha h \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}^2\alpha h}{\operatorname{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} = 1 \quad (2.93)$$

выражения (2.89) – (2.91) могут быть аппроксимированы выражениями

$$\sigma_x = -2\gamma H \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 - \alpha z) \exp(-\alpha z), \quad (2.94)$$

$$\tau_{xz} = 2\gamma H \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x \cdot \alpha z \exp(-\alpha z), \quad (2.95)$$

$$\sigma_z = -\gamma H \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 + \alpha z) \exp(-\alpha z) \right), \quad (2.96)$$

Точность такой замены может быть определена в соответствии с гра-

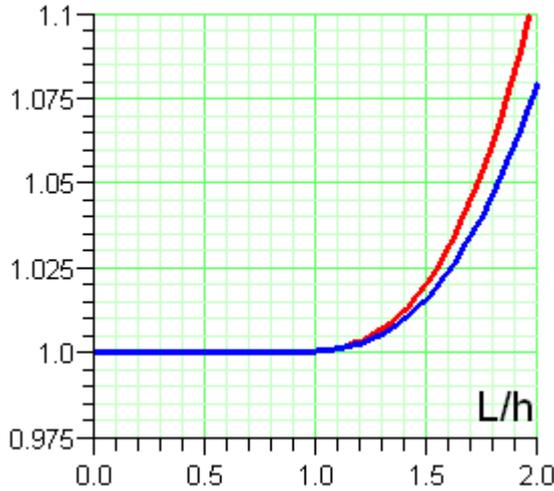


Рис. 2.8. Отношение коэффициентов (2.93) уравнений (2.90–(2.92) к своим предельным значениям с ростом отношения  $L/h$

фиком (рис. 2.8). В частности, вплоть до  $\frac{L}{h} \approx 1,7 \div 1,8$  точность вполне удовлетворительна (отличие коэффициентов от своих предельных значений не более 5%).

Для ленточных целиков напряженно-деформированное состояние потолочины удовлетворяет условиям плоской деформации  $\varepsilon_y = 0$ , при которой перемещения  $u$ ,  $v$  по осям  $x$ ,  $y$  определяются интегрированием уравнений закона Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_3}{E_1} \sigma_z, \quad (2.97)$$

$$0 = \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z, \quad (2.98)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_3}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_1} \sigma_z, \quad (2.99)$$

и могут быть преобразованы к виду

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \nu_2^2}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_3 + \nu_2^2}{E_1} \sigma_z, \quad (2.100)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_3 + \nu_2^2}{E_1} \sigma_x + \frac{1 - \nu_2^2}{E_1} \sigma_z, \quad (2.101)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu_3)}{E_1} \tau_{xz}. \quad (2.102)$$

Эти уравнения совпадут с уравнениями изотропной среды

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \quad (2.103)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right), \quad (2.104)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}, \quad (2.105)$$

если за эффективные модули  $E_{\text{eff}}$ ,  $\nu_{\text{eff}}$  условно изотропной среды расчетной плоскости  $Oxz$  принять

$$E_{\text{eff}} = E_1 \frac{1+2\nu_3 + \rho\nu_2^2}{(1+\nu_3)^2}, \quad (2.106)$$

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\nu_3 + \rho\nu_2^2}{1+\nu_3}. \quad (2.107)$$

В окончательном выражении, где за точку отсчета (нулевые значения) выбраны перемещения в середине пролета, это дает

$$u = \frac{\gamma H}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \left\{ \frac{[(1-\mu)(\text{sh}2\alpha h + 2\alpha h) - 2(1+\mu)\text{sh}^2\alpha h \cdot \alpha z] \text{sh}\alpha z -}{\text{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right. \\ \left. - \frac{[2(1-\mu)\text{sh}^2\alpha h + 2(1+\mu)\alpha^2 h^2 - (1+\mu)(\text{sh}2\alpha h + 2\alpha h) \cdot \alpha z] \text{ch}\alpha z}{\text{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right\} \quad (2.108)$$

$$w = \frac{\gamma H}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} \left\{ \frac{[-4\text{sh}^2\alpha h + 2(1+\mu)\alpha^2 h^2 - (1+\mu)(\text{sh}2\alpha h + 2\alpha h) \cdot \alpha z] \text{sh}\alpha z +}{\text{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right. \\ \left. + \frac{[2(\text{sh}2\alpha h + 2\alpha h) + 2(1+\mu)\text{sh}^2\alpha h \cdot \alpha z] \text{ch}\alpha z}{\text{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2} \right\} - \frac{\gamma H(1-\mu^2)z}{E} - \\ - \frac{2\gamma H}{E} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh}2\alpha h + 2\alpha h}{\alpha(\text{sh}^2\alpha h - \alpha^2 h^2)}, \quad (2.109)$$

где  $E = \frac{E_{\text{eff}}}{1 - \nu_{\text{eff}}^2}$ ,  $\mu = \frac{\nu_{\text{eff}}}{1 - \nu_{\text{eff}}}$ .

Соотношения (2.108), (2.109) при малых пролетах аналогичным переходом к пределам могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$u = \frac{2\gamma H}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} [(1 + \mu) - (1 - \mu) \exp(-\alpha z)], \quad (2.110)$$

$$w = \frac{2 \ln 2 \cdot \gamma H L}{\pi E} - \frac{\gamma H (1 - \mu^2) z}{E} + \frac{2\gamma H}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} [(1 + \mu) \alpha z + 2] \exp(-\alpha z) \quad (2.111)$$

что в итоге завершает полное решение рассматриваемой задачи.

Следует отметить, что полученное решение дает возможность вычислить напряжения изгиба не у самих целиков, а между опорными целиками, но для наших целей этого будет вполне достаточно.

#### 2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

В предлагаемую модель входят параметры, отражающие природные факторы: вертикальная нагрузка  $\gamma H$  – результат суммарного веса налегающих осадочных пород и собственного веса потолочины; деформационные свойства массива пород в виде модулей деформации  $E_1$ ,  $E_2$  и коэффициентов поперечного расширения  $\nu_1$  и  $\nu_2$  для главных осей анизотропии. Параметрами, отражающими технологические факторы, являются геометрические размеры выработок  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и коэффициент постели упругого основания  $k$ .

Среди этих параметров уточнения в их определении и назначении требуют масштабный коэффициент перехода к модулю деформации массива пород и коэффициент постели упругого основания  $k$  из системы междукамерных и междупанельных целиков.

### 2.4.1. Определение модуля деформации массива пород

Кроме схематизации структурных геометрических особенностей массива, для аналитического описания его механического поведения, необходимы, разумеется, макроскопические экспериментальные наблюдения над деформируемыми образцами. В принципе требуемый эксперимент достаточно прост: необходимо взять элементарный объем породы, приложить к нему нагрузку и измерить происходящие кинематические изменения. Если размеры образцов, на которых определяются характеристики, соизмеримы с этим объемом (*размерами элементарного объема*), то они и будут характеристиками массива. В том случае, когда элементарный объем существенно превышает максимально возможные с *технической точки зрения* размеры образцов породы, должны применяться те или иные методы перехода от характеристик испытываемых образцов к характеристикам массива.

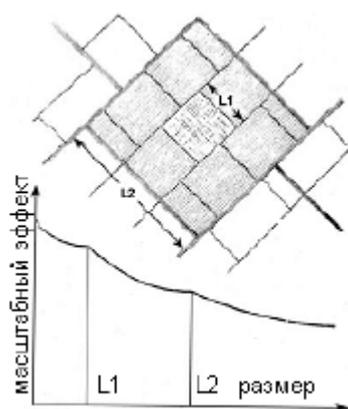


Рис. 2.9. Кривая масштабного эффекта свойств реального массива

Изменение математического ожидания показателя свойств массива горных пород в зависимости от размеров области определения (масштабный эффект I рода [91, 92]) описывается (рис. 2.9) некоторой кривой, вообще говоря, ступенчатого характера.

Аналитическое описание кривой масштабного эффекта – перехода от модуля деформации образца к модулю деформации массива пород может быть осуществлено различными путями, но, пожалуй, наиболее естественным из них будет путь, при котором параметры, определяющие свойства пород, считаются случайными функциями координат вследствие неоднородности структуры массива. Анализ возникающих при этом эффектов в общем случае связан с преодолением значительных математических трудностей, но может быть, однако, проведен [74, 26], если ограничиться простейшими предположениями о деформационных свойствах и характере неоднородностей, а также о геометрии исследуемого массива.

двух образцов и внешних нагрузках. Выявленные при этом особенности и обнаруженные эффекты будут иметь место и для общих случаев деформирования.

### 2.4.1.1. Постановка и решение задачи статистической механики

Рассмотрим, следуя [74], плоскую задачу теории упругости неоднородной изотропной среды для длинной прямоугольной пластинки  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,

$a/b \gg 1$  (рис. 2.10) с приложенной к ее краям  $x = \pm a$  нагрузкой величиной  $2b\sigma_0$ .

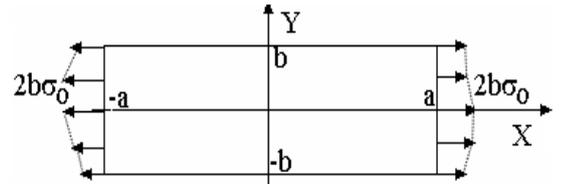


Рис. 2.10. Расчетная схема нагружения

Уравнения равновесия, совместности деформаций, определяющие уравнения и граничные условия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (2.112)$$

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \sigma_{mn} \delta_{ij} - \theta (\sigma_{mn} \delta_{ij} - \sigma_{ij}), \quad \sigma_{ij} n_j |_{\Gamma} = g_i \quad (2.113)$$

после введения обычным образом функции напряжений Эри (Airy)  $\phi$  могут быть записаны в виде краевой задачи

$$\nabla^2 (\gamma \nabla^2 \phi) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \phi |_{\Gamma} = f_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma} = f_2, \quad (2.114)$$

где  $f_i$  – выражаются через заданные на контуре  $\Gamma$  функции известными формулами [11, 75, 83].

При интегральном удовлетворении граничным условиям в виде

$$\sigma_y(x, \pm b) = \tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \quad \int_{-b}^b \tau_{xy}(\pm a, y) dy = 0, \quad (2.115)$$

$$\int_{-b}^b \sigma_x(\pm a, y) dy = 2b\sigma_0, \quad \int_{-b}^b \sigma_x(\pm a, y) y dy = 0, \quad (2.116)$$

рассмотрен предельный случай неоднородностей свойств в виде эргодически случайных полей по длине пластинки при  $\frac{\nu}{E} = \text{const}$ ,  $\gamma = \frac{1}{E} = \gamma(x)$ . В этом слу-

чае  $\theta(x) = \frac{1+\nu}{E} = \gamma(x) + \text{const}$ , краевая задача (2.114) принимает вид

$$\nabla^2(\gamma \nabla^2 \phi) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \text{или} \quad \gamma \nabla^4 \phi = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.117)$$

и имеет решение

$$\sigma_x = \sigma_0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (2.118)$$

$$\varepsilon_x = \gamma(x) \sigma_0, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad (2.119)$$

при котором случайной оказывается только деформация  $\varepsilon_x$ , причем она пропорциональна  $\gamma(x)$ .

Средние значения и корреляционные функции

$$K_\varepsilon(\xi) = K_\varepsilon(x_1, x_2) = M[\varepsilon_x(x_1) \varepsilon_x(x_2)] \quad (2.120)$$

$$K_\gamma(\xi) = K_\gamma(x_1, x_2) = M[\gamma(x_1) \gamma(x_2)], \quad \xi = x_2 - x_1 \quad (2.121)$$

деформации  $\varepsilon_x$  и параметра  $\gamma$  связаны соотношениями

$$M(\varepsilon_x) = \sigma_0 M[\gamma(x)], \quad K_\varepsilon(\xi) = \sigma_0^2 K_\gamma(\xi) \quad (2.122)$$

Измерения в процессе эксперимента производятся на некоторой базе  $L$  и определяемые усредненные значения компонент тензора деформации

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_x(L) = \overline{\varepsilon_x(L)} = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_x(x) dx, \quad (2.123)$$

оказываются случайными величинами, т. е. при одинаковых условиях эксперимента принимают различные значения, определяя тем самым разброс механических, в том числе деформационных, свойств.

Эффективный модуль деформации (упругости) в этом случае равен

$$E_{ef} = \frac{\sigma_0}{\bar{\varepsilon}_x} = \frac{L\sigma_0}{\int_0^L \varepsilon_x(x) dx} \quad (2.124)$$

Разлагая правую часть выражения (2.124) в ряд по степеням флуктуаций  $\varepsilon'_x = \varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_x$  получим

$$E_{ef} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon'_x}{\bar{\varepsilon}_x} + \left( \frac{\varepsilon'_x}{\bar{\varepsilon}_x} \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon'_x}{\bar{\varepsilon}_x} \right)^3 + \dots \right], \quad (2.125)$$

где  $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_0}{L} \int_0^L \gamma'(x) dx$ ,  $\bar{\varepsilon}_x = \sigma_0 \bar{\gamma}$

Тогда, ограничиваясь членами второго порядка,

$$M(E_{ef}) = \frac{1}{M(\gamma)} \left( 1 + \frac{D(\bar{\varepsilon}_x)}{M^2(\bar{\varepsilon}_x)} \right) = \frac{1}{M(\gamma)} \left( 1 + \frac{D(\bar{\varepsilon}_x)}{\sigma_0^2 M^2(\gamma)} \right) \quad (2.126)$$

$$D(E_{ef}) = \frac{D(\bar{\varepsilon}_x)}{M^2(\gamma) M^2(\bar{\varepsilon}_x)} = \frac{D(\bar{\varepsilon}_x)}{\sigma_0^2 M^4(\gamma)} \quad (2.127)$$

Корреляционная функция  $K_{\bar{\varepsilon}}(x_1, x_2)$  осредненной деформации равна

$$K_{\bar{\varepsilon}}(x_1, x_2) = M[\bar{\varepsilon}_x(x_1) \bar{\varepsilon}_x(x_2)] = M \left\{ \frac{1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varepsilon_x(x') \varepsilon_x(x'') dx' dx'' \right\} \quad (2.128)$$

или, меняя местами операции интегрирования и нахождения математического ожидания, получим

$$K_{\bar{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_{\varepsilon}(x', x'') dx' dx'' = \frac{\sigma_0^2}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_{\gamma}(x', x'') dx' dx'' \quad (2.129)$$

Когда функция  $K_{\gamma}$  стационарна [98],

$$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_{\gamma}(x', x'') dx' dx'' = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_{\gamma}(x'' - x') dx' dx'', \quad (2.130)$$

это выражение можно упростить, вводя переменные  $\xi$  и  $\eta$  (соответствующие прямоугольным координатам, повернутым на  $45^\circ$ , как показано на рис. 2.11), связанные с исходными координатами  $x'$  и  $x''$  соотношениями

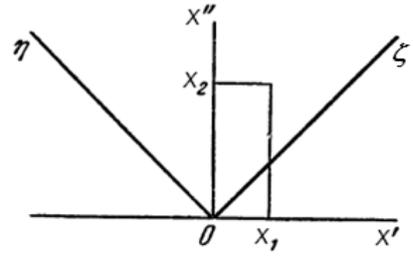


Рис.2.11. К вычислению интеграла

$$\begin{cases} \xi\sqrt{2} = x' + x'' \\ \eta\sqrt{2} = x'' - x' \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x'\sqrt{2} = \xi - \eta \\ x''\sqrt{2} = \xi + \eta \end{cases} \quad (2.131)$$

Расставляя пределы интегрирования,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_\gamma(x', x'') dx' dx'' &= \int_0^{x_2/\sqrt{2}} \int_\eta^{x_2\sqrt{2}-\eta} K_\gamma(\eta\sqrt{2}) d\zeta d\eta + \int_{-x_1/\sqrt{2}}^0 \int_{-\eta}^{x_1\sqrt{2}+\eta} K_\gamma(\eta\sqrt{2}) d\zeta d\eta - \\ &- \int_0^{(x_2-x_1)/\sqrt{2}} \int_{x_1\sqrt{2}+\eta}^{x_2\sqrt{2}-\eta} K_\gamma(\eta\sqrt{2}) d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (2.132)$$

После интегрирования по  $\zeta$  и перехода от  $\eta$  к  $\xi = \eta\sqrt{2}$  получим

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_\gamma(x', x'') dx' dx'' &= \int_0^{x_2} (x_2 - \xi) K_\gamma(\xi) d\xi + \int_0^{x_1} (x_1 - \xi) K_\gamma(-\xi) d\xi - \\ &- \int_0^{x_2-x_1} (x_2 - x_1 - \xi) K_\gamma(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.133)$$

Переходя к корреляционной функции  $K_{\bar{\varepsilon}}(x_1, x_2)$  осредненной деформации  $\bar{\varepsilon}_x$  и полагая  $x_2 = x_1 = L$ , получим, что дисперсия осредненной деформации выражается через корреляционную функцию  $K_\gamma$  параметра свойств  $\gamma$  соотношением

$$D(\bar{\varepsilon}_x) = \frac{\sigma_0^2}{L^2} \int_0^L (L - \xi) [K_\gamma(\xi) + K_\gamma(-\xi)] d\xi \quad (2.134)$$

или для вещественной в нашем случае случайной функции

$$D(\bar{\varepsilon}_x) = \frac{2\sigma_0^2}{L^2} \int_0^L (L - \xi) K_\gamma(\xi) d\xi \quad (2.135)$$

Таким образом,

$$D(\bar{\varepsilon}_x) = \sigma_0^2 K_\gamma(0) \psi, \quad (2.136)$$

где  $\psi = \frac{2}{L^2 K_\gamma(0)} \int_0^L (L - \xi) K_\gamma(\xi) d\xi.$

Аналогично, раскладывая в ряд, получим

$$M(\gamma) = M\left(\frac{1}{E}\right) = \frac{1}{M(E)} \left(1 + \frac{DE}{M^2(E)}\right) \quad (2.137)$$

$$D(\gamma) = D\left(\frac{1}{E}\right) = \frac{DE}{M^4(E)} \quad (2.138)$$

Поэтому, подставляя в (2.125)–(2.126) с учетом  $M(\varepsilon) = \sigma_0 M(\gamma)$ , получим

$$M(E_{ef}) = \frac{M(E)}{\left(1 + \frac{D(E)}{M^2(E)}\right)} \left(1 + \frac{D(E)}{M^2(E)} \cdot \frac{\psi}{\left(1 + \frac{D(E)}{M^2(E)}\right)^2}\right) \quad (2.139)$$

и

$$D(E_{ef}) = \frac{D(\gamma)}{M^4(\gamma)} \psi = \frac{D(E) \cdot \psi}{\left(1 + \frac{D(E)}{M^2(E)}\right)^4} \quad (2.140)$$

Или, также ограничиваясь членами второго порядка,

$$M(E_{ef}) = M(E) \frac{1 + (2 + \psi) \cdot V^2}{1 + 3V^2}, \quad (2.141)$$

и

$$D(E_{ef}) = D(E) \frac{\Psi}{1 + 4V^2}, \quad (2.142)$$

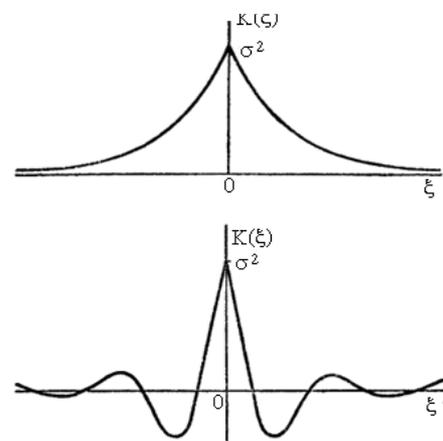
$$\text{где } V = \frac{\sqrt{D(E)}}{M(E)}, \quad \Psi = \frac{2}{L^2 K_\gamma(0)} \int_0^L (L - \xi) K_\gamma(\xi) d\xi$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия эффективного модуля деформации (упругости) массива горных пород выражаются через функцию осреднения  $\Psi$  и для завершения решения поставленной задачи необходимо уточнить вид корреляционной функции  $K_\gamma$  податливости  $\gamma$ .

#### 2.4.1.2. Кривые масштабного эффекта

Случайные функции являются следствием непрерывного воздействия на динамическую систему различных случайных факторов. Поэтому при достаточно большом значении интервала  $\xi = x_2 - x_1$  отклонение ординаты случайной функции от ее математического ожидания в точке  $x_2$  становится практически независимым от значения этого отклонения в точке  $x_1$ . В этом случае корреляционная функция при  $|\xi| \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю [98].

Поэтому  $K(\xi)$  может или монотонно убывать, или стремиться к нулю по более сложному закону, как это показано на рис. 2.12. При этом на практике не всегда ясно, чем вызвано наличие волн на коррелограмме (ковариограмме): или самой



2.12. Типы коррелограмм

случайной функцией, или является артефактом, связанным с недостаточно большим интервалом наблюдений  $L$ .

Поэтому принято целесообразным ограничиться рассмотрением корреляционных функций монотонного типа, которые могут быть аппроксимированы экспоненциальными зависимостями и имеют различную скорость убывания.

Тогда, если корреляционную функцию принять в виде

$$K(\xi) = K(0) \exp(-\omega |\xi|), \quad (2.143)$$

то, вычисляя  $\psi$  и подставляя в (2.141) и (2.142), для статистических характеристик модуля деформации получим следующие соотношения:

$$\frac{M(E_{ef})}{M(E)} = \frac{\Lambda^2 + 2V^2 [\exp(-\Lambda) + \Lambda^2 + \Lambda - 1]}{(1 + 3V^2) \Lambda^2}, \quad (2.144)$$

$$\frac{D(E_{ef})}{D(E)} = \frac{2 [\exp(-\Lambda) + \Lambda - 1]}{(1 + 4V^2) \Lambda^2}, \quad (2.145)$$

где  $M(E_{ef})$ ,  $M(E)$  и  $D(E_{ef})$ ,  $D(E)$  – математические ожидания и дисперсии эффективного и собственного (в размерах элементарного блока) модуля упругости (деформации) породы соответственно;  $V = \frac{\sqrt{D(E)}}{M(E)}$  – коэффициент вариации

упругих свойств элементарного объема;  $\Lambda = \omega L$ ,  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_x(x) dx$ ,  $L$  – база измерения деформации и определения модуля деформации  $E_{ef}$ .

Поскольку интегральный масштаб корреляции (расстояние корреляции), характеризующий область, внутри которой значения существенно коррелированы, равен

$$L_0 = \frac{1}{K(0)} \int_0^\infty K(\eta) d\eta = \frac{1}{\omega}, \quad (2.146)$$

то в приведенных соотношениях параметр  $\Lambda = \omega L = \frac{L}{L_0}$  можно считать безразмерной длиной. Анализ полученных соотношений (2.144), (2.145) и графиков (рис. 2.13) позволяет определить относительную длину базы измерений  $\Lambda$ , при дальнейшем увеличении которой уже не происходит существенного изменения измеряемых характеристик свойств. Эта длина зависит от однородности породы (вариации ее свойств). При  $V = 0,5$  относительные значения модуля упругости отличаются от своих предельных значений не более чем на 5% уже при

$\Lambda = 5,4$ . При  $V = 0,7$  это значение  $\Lambda$  равно 9,2. Другими словами, можно принять, что неоднородность перестает заметно искажать деформационные характеристики объема (массива), начиная с базы измерений  $\Lambda = 5 \div 10$  (в зависимости от  $V$ ). При этом масштабный множитель находится в пределах  $0,8 \div 0,9$ , а дисперсия модуля уменьшается до 7–15 раз.

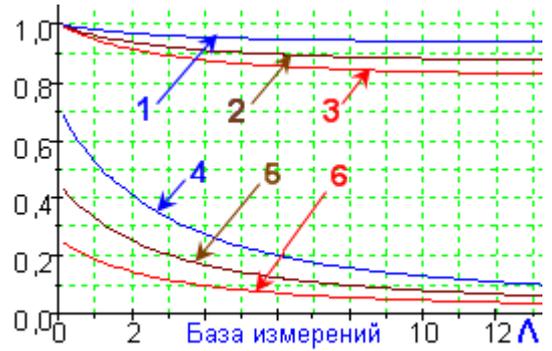


Рис. 2.13. Кривые масштабного эффекта: 1, 2, 3 – мат. ожидания (8), 4, 5, 6 – дисперсии (9) при коэффициентах вариации 0,3; 0,5; 0,7

Аналогично, если корреляционную функцию принять в виде

$$K(\eta) = K(0) \exp(-\beta^2 \eta^2), \quad (2.147)$$

то интегральный масштаб корреляции, характеризующий область внутри которой значения существенно коррелированы, будет равен

$$L_0 = \frac{1}{K(0)} \int_0^\infty K(\eta) d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}, \quad (2.148)$$

и соответственно кривые масштабного эффекта будут выражаться соотношениями

$$\frac{M(E_{ef})}{M(E)} = \frac{\pi \Lambda^2 + V^2 \left[ 4 \exp\left(-\frac{\pi}{4} \Lambda^2\right) + 2\pi \cdot \Lambda \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Lambda\right) + 2\pi \Lambda^2 - 4 \right]}{\pi(1 + 3V^2) \Lambda^2} \quad (2.149)$$

$$\frac{D(E_{ef})}{D(E)} = \frac{4 \exp\left(-\frac{\pi}{4} \Lambda^2\right) + 2\pi \cdot \Lambda \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Lambda\right) - 4}{\pi \Lambda^2} \quad (2.150)$$

где  $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$

Сравнение полученных результатов при различных корреляционных функциях (рис. 2.14) показывает, что кривые масштабного эффекта практически не зависят от скорости убывания этих корреляционных функций, а определяются безразмерной длиной базы измерений  $\Lambda$ .

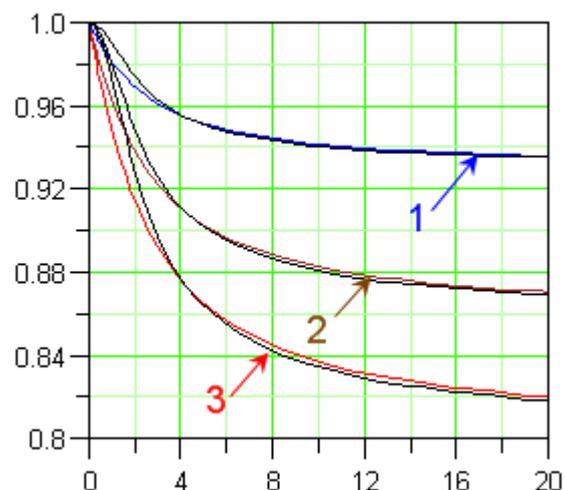


Рис. 2.14. Кривые масштабного эффекта при различных корреляционных функциях: 1, 2, 3 – мат. ожидания (8) при коэффициентах вариации 0,3; 0,5; 0,7 соответственно

#### 2.4.2. Оценка деформируемости упругого основания из оставляемых целиков и определение коэффициента постели

Определение коэффициента постели упругого основания основано на следующих предположениях. Оставляемые опорные целики представляют собой (см. рис. 2.1) пластины (размерами  $a_k \times d \times h_{\text{ет}}$  для междукамерных целиков и  $b_k \times c \times h_{\text{ет}}$  для междупанельных), которые находятся под действием вертикальной нагрузки в условиях, близких к условиям плоской деформации, когда в каждом сечении, перпендикулярном длинной оси целика, картина НДС одна и та же.

В соответствии с расположением осей анизотропии массива кварцитов (см. рис. 2.2) закон Гука имеет вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_3}{E_1} \sigma_z \quad (2.151)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z \quad (2.152)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_3}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_1} \sigma_z \quad (2.153)$$

Рассматривая случаи: 1 – расположения длинной оси целиков по напластованию и 2 – вкрест напластования (рис. 2.15), будем иметь:

– в первом случае, когда условие плоской деформации записывается в виде  $\sigma_y = 0, \varepsilon_x = 0$

$$\varepsilon_z = \frac{1 - \nu_3^2}{E_1} \sigma_z \quad (2.154)$$

– во втором случае, когда условие плоской деформации записывается в виде  $\sigma_x = 0, \varepsilon_y = 0$

$$\varepsilon_z = \frac{1 - \nu_2 \nu_3}{E_1} \sigma_z \quad (2.155)$$

Считая для таких пластин деформацию однородной по ее высоте,

$$\frac{w}{h_{et}} = \varepsilon_z \quad (2.156)$$

получим в первом случае коэффициент постели  $k_1$

$$k_1 = \frac{q}{w} = \frac{E_1 \lambda}{(1 - \nu_3^2) h_{et}} \quad (2.157)$$

а во втором случае

$$k_2 = \frac{q}{w} = \frac{E_1 \lambda}{(1 - \nu_2 \nu_3) h_{et}} \quad (2.158)$$

В силу того, что в общем случае  $\nu_2 > \nu_3$ , целики предпочтительно располагать длинной стороной вкрест напластования железистых кварцитов, поскольку при этом больше коэффициент постели упругого основания.

Для изотропных пород

$$k = k_1 = k_2 = \frac{E \lambda}{(1 - \nu^2) h_{et}} \quad (2.159)$$

Следует также отметить, что коэффициент постели  $k$  находится в очевидных пределах, соответствующих свободному поперечному деформированию пород упругого основания и отсутствию такового. В последнем случае, отве-

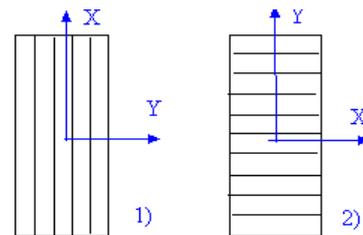


Рис. 2.15. К расчету коэффициентов постели.

чающем условиях «компрессионного», объемного сжатия, из закона Гука имеем

$$\frac{w}{h_{\text{et}}} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \sigma_z, \quad (2.160)$$

т.е. коэффициент постели равен

$$k_2 = \frac{q}{w} = \frac{E(1-\nu)\lambda_2}{(1+\nu)(1-2\nu)h_{\text{et}}} \quad (2.161)$$

Следовательно,

$$\frac{E_0}{(1-\nu_0^2)H} \leq k \leq \frac{(1-\nu_0)E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)H}. \quad (2.162)$$

Принципиальная возможность и целесообразность уточнения коэффициента постели зависит от значения коэффициента Пуассона  $\nu_0$  и может быть оценена графиком (рис. 2.16). Из него следует, что такой учет может быть существенным при больших коэффициентах Пуассона.

В работах [57, 111] предложено учесть работу в условиях всестороннего («компрессионного», объемного) сжатия некоторой части упругого основания, а

именно, сопряжений междукамерных и междупанельных целиков применительно к шахте им. Губкина. Искомый коэффициент постели  $k$  упругого основания для всей площади основания предлагается определять из соотношения

$$k = \frac{E\lambda_1}{(1-\nu^2)h_{\text{et}}} + \frac{E(1-\nu)\lambda_2}{(1+\nu)(1-2\nu)h_{\text{et}}} = \frac{E}{(1-\nu^2)h_{\text{et}}} \left( \lambda_1 + \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} \lambda_2 \right) \quad (2.163)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – доли от общей площади оставляемых в пределах обрабатываемого этажа междукамерных и междупанельных целиков и их сопряжений соответ-

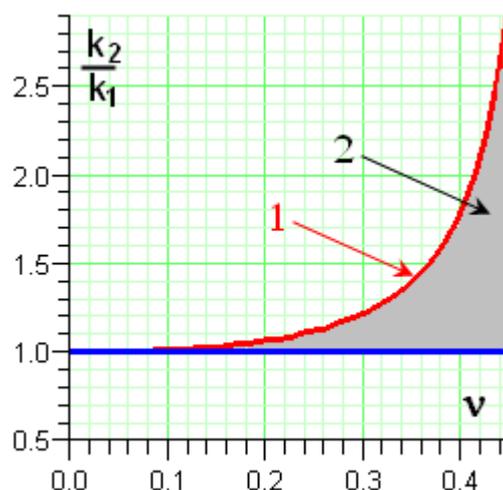


Рис. 2.16. Кривая (1) и диапазон отношений (2) коэффициентов постели:  $k_2$  – при отсутствии,  $k_1$  – при свободном поперечном деформировании основания

венно.

Однако предлагаемая [57, 111] поправка практически ничего не дает. Действительно, последнее выражение может быть переписано в виде

$$k = \frac{E}{(1-v^2)h_{et}} \left( \lambda + \frac{v^2}{(1-2v)} \lambda_2 \right) = \frac{E}{(1-v^2)h_{et}} (\lambda + \Delta\lambda_2), \quad (2.164)$$

где  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  – общий коэффициент потери руды в оставляемых целиках.

Поэтому относительная величина влияния последнего слагаемого в (2.163) равна

$$\delta\lambda_2 = \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v^2}{(1-2v)} \cdot \frac{cd}{a_k d + b_k c + cd}. \quad (2.165)$$

Для проектных геометрических параметров базового варианта системы разработки шахты им. Губкина  $a_k = 55$  м,  $b_k = 30$  м,  $c = 25$  м,  $d = 20$  м. Коэффициент Пуассона для кварцитов  $\nu \leq 0,26 \div 0,3$ . Следовательно, в таком случае  $\delta\lambda_2 \leq 0,03 \div 0,05$ . В частности, для предлагаемых далее (раздел 4) рекомендаций  $a_k = 75$  м,  $b_k = 36$  м,  $c = 18$  м,  $d = 3,6$  м величина  $\delta\lambda_2$  составит менее 1%.

Последнее означает, что коэффициент постели  $k$  упругого основания с погрешностью, по крайней мере, не более 3÷5% допустимо и предпочтительно рассчитывать по соотношению

$$k = \frac{E\lambda}{(1-v^2)h_{et}} = \frac{E(1-\chi)}{(1-v^2)h_{et}}. \quad (2.166)$$

При этом входящий в решения раздела 2.3.1 параметр  $\alpha$  равен

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} = \frac{1}{h} \sqrt[4]{\frac{3E_{et}h(1-\chi)}{Eh_{et}}} = \frac{1}{h} \sqrt[4]{\frac{3E_{et}h}{Eh_{et}} \left( 1 - \frac{a_k b_k}{(a_k + d)(b_k + c)} \right)}, \quad (2.167)$$

где  $h$ ,  $h_{et}$  – мощность потолочины и выемочная мощность;  $E$ ,  $E_{et}$  – модуль упругости рудных массивов потолочины и этажа соответственно;  $\chi$  – коэффициент извлечения руды;  $a_k$ ,  $b_k$  – размеры очистных камер;  $c$ ,  $d$  – размеры оставляемых междукамерных целиков.

Использование в качестве геомеханического параметра предлагаемых математических моделей коэффициента постели упругого основания обладает преимуществом достаточно сильной его робастности (устойчивости к нарушению исходных предпосылок) при изменении формы выемочных камер. Другими словами, соотношения (2.166) остаются применимыми для расчетов НДС конструктивных элементов системы разработки при ведении горных работ не только с прямоугольными, но и с другими, например, цилиндрическими очистными камерами, включая технологию СГД [24, 25, 120]. В частности, при «сотовом» расположении выемочных камер в вершинах правильных треугольников со стороной  $d + \delta$  (где  $d$  – диаметр камеры,  $\delta$  – наименьший размер целика) коэффициент извлечения  $\chi$  равен

$$\chi = \frac{\pi}{2\sqrt{3} \left(1 + \frac{\delta}{d}\right)^2} \quad (2.168)$$

### ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

1. Горные породы, слагающие массив потолочины, обладают анизотропией деформационных свойств. Вместе с тем, в ранее предложенных математических моделях и расчетных схемах тонкие плиты на упругом основании предполагаются изотропными. В связи с этим исследование степени влияния анизотропии является достаточно важным, прежде всего потому, что позволяет определить те случаи, когда имеющуюся анизотропию можно не учитывать, поскольку, как часто бывает в горной практике, имеющихся данных об анизотропии свойств пород и массива месторождения оказывается недостаточно, а их уточнение (или получение новых данных) требует большого количества специально проводимых дорогостоящих экспериментов.

2. Оценку напряженно-деформированного состояния предохранительных потолочин в зависимости от условий допустимо и целесообразно производить на основе математических моделей тонких анизотропных плит на упругом ос-

новании при исследовании их глобального поведения в пределах шахтного поля или плиты с опорными целиками при исследовании локального поведения в пределах камеры.

3. Входящие в математическую модель параметры отражают основные природные (геологические условия, свойства массива пород, природное поле напряжений) и технологические факторы (геометрические параметры системы разработки в виде размеров шахтного поля; целиков и потолочин, включая их взаимное расположение) через коэффициент постели упругого основания.

4. Зависимость горизонтальных напряжений в потолочине и вертикальной нагрузки на поддерживающие целики от технологических факторов открывает принципиальную возможность их регулирования в нужных пределах путем соответствующего подбора мощности и размеров потолочины и, в первую очередь, геометрических параметров ведения очистных работ (размеров камер и оставляемых междукамерных опорных целиков).

5. Медленная сходимость решений в виде бесконечных двойных рядов Фурье и вызванная этим необходимость обязательного контроля точности при арифметических вычислениях конечных сумм предопределяет целесообразность использования набора расчетных схем и решений, например, в виде полученных методом М. Леви ординарных рядов Фурье, обладающих более быстрой сходимостью, или специальных функций (нормальных фундаментальных функций или функций А.Н. Крылова для цилиндрического изгиба).

6. При локальном в пределах отдельно взятой камеры рассмотрении потолочины ее толщина становится сопоставимой с пролетом кровли, гипотезы Кирхгофа не выполняются, рассмотренные расчетные схемы тонких плит становятся неадекватными и необходима другие расчетные схемы, в основу которых кладутся основные уравнения теории упругости. В качестве отправного решения взята расчетная схема Б.Н. Жемочкина, модификация решения которого заключается в получении полного решения задачи с учетом анизотропии рудного массива, слагающего потолочину.

7. Масштабный эффект свойств массива в зависимости от иерархии его структуры имеет, вообще говоря, несколько уровней изменения с соответствующей кривой ступенчатого характера. Для массива железистых кварцитов Коробковского месторождения с достаточно хорошо залеченными трещинами (геологический индекс прочности  $GSI > 75$ ) можно ограничиться одним таким масштабным уровнем.

8. Полученные решения статистических задач механики позволяют оценить влияние структурной неоднородности пород на механические свойства массива и дать аналитическое описание масштабного эффекта. Установлено, что кривые масштабного эффекта практически не зависят от скорости убывания корреляционных функций, определяются безразмерной длиной базы измерений  $\Lambda$ , а неоднородность свойств перестает заметно искажать деформационные характеристики объема массива, начиная с  $\Lambda \approx 5 \div 10$  в зависимости от коэффициента вариации. При этом масштабный множитель перехода к массиву находится в пределах 0,8–0,9, а дисперсия модуля уменьшается до 7–15 раз

9. Влияние объемного напряженного состояния сопряжений междукамерных и междупанельных целиков на коэффициент постели упругого основания незначительно и с погрешностью не более 3–5% междукамерные целики могут быть приняты пластинами, работающими в условиях одноосного сжатия, при этом предпочтительно расположение длинной оси целиков вкрест простирания кварцитов перпендикулярно их напластованию. Коэффициент постели упругого основания определяется по предлагаемой формуле.

10. Полученный набор решений задач, учитывающих различные комбинации действующих факторов, позволяет провести исследование степени их влияния на напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов системы разработки Коробковского месторождения.